

1 TEORIA DELLE MISURE

1.1 Osservazioni ed errori delle misure

Si definisce “*misura di una grandezza.....qualsiasi metodo con cui si stabilisca una corrispondenza univoca e reciproca fra tutte le grandezze di un determinato genere e tutti i numeri interi, razionali e reali secondo il caso ... la misurazione richiede una relazione uno - uno tra il numero e le grandezze in questione: relazione che può essere diretta o indiretta... secondo le circostanze*” [1].

Ad ogni grandezza fisica, pertanto, si deve poter associare un valore numerico in modo univoco ed oggettivo, cioè riproducibile nelle stesse condizioni da qualsiasi osservatore. Detto valore sarà pari al rapporto fra la grandezza stessa e l'unità di misura per essa prescelta.

Per eseguire tale associazione si utilizzano strumenti e metodiche che consentono di mettere in relazione da una parte la grandezza da misurare e dall'altra l'unità di misura oppure suoi multipli o sottomultipli. Tuttavia, non esistono misure esenti da errore, nemmeno quelle effettuate con gli strumenti di misura tecnologicamente più avanzati (che comunque consentono solo di ridurre gli errori). Gli errori di misura possono avere cause diverse: mal funzionamenti, cattiva taratura dello strumento di misura usato (ad esempio un orologio che va avanti o indietro), condizioni sfavorevoli nelle quali è eseguita la misura (ad esempio, se si controlla la pressione delle gomme di un'auto dopo un lungo viaggio, magari a velocità elevata, si ottiene un valore falsato, maggiore di quello a freddo e non confrontabile con il valore indicato dalla casa costruttrice) e imperizia dell'operatore. Non c'è, pertanto, misura che possa dirsi esente da errore.

L'insieme delle operazioni tramite le quali è eseguito il confronto tra la grandezza da misurare e l'unità di misura è denominata *misura* o *misurazione*.

La misura di una grandezza fisica si può effettuare in due modi:

- *misura o osservazione diretta*, si misura direttamente la grandezza confrontandola con la relativa unità di misura attraverso uno strumento, il quale ci fornisce immediatamente il risultato. Un esempio di determinazione diretta è la misura di una lunghezza mediante un nastro campione.
- *misura o osservazione indiretta*, non sempre le grandezze vengono misurate direttamente, spesso, per misurare una grandezza, se ne misurano altre direttamente e da queste con un calcolo si ricava, successivamente, il valore della grandezza cercata. In questo caso si dice che si è effettuata una misura indiretta della grandezza (per esempio nella misura del raggio di un oggetto di forma circolare è più semplice misurare in modo diretto il diametro e calcolare il

raggio usando la formula $r = d/2$; misure di aree o di volumi, ecc.) Sono, quindi, definite mediante un legame funzionale che lega una grandezza ad altre direttamente misurabili.

Esistono, inoltre, le misure definite condizionate, ovvero quelle in cui le grandezze che si determinano devono sottostare a delle condizioni note.

- osservazioni condizionate: quelle che devono soddisfare una determinata equazione di condizione, quale ad esempio “*la somma angoli interni di un triangolo deve essere uguale π* ”.

La misura è un insieme di tre elementi: il numero, l'unità di misura, l'incertezza; quest'ultima introdotta, visto che, osservazioni sperimentali hanno evidenziato come la ripetizione della misura di una medesima grandezza porta a risultati diversi.

In ogni ripetizione della misura la valutazione del numero di quantità campione presenti e la stima di una sua frazione è soggetta a fluttuazioni che generano perciò variazioni nel valore finale. Infatti, per quel che concerne la determinazione del valore di una grandezza si afferma che l'incertezza è dovuta ad inevitabili errori di misura (calibrazione strumenti, condizioni ambientali, fluttuazioni della risposta, ecc.).

Una definizione importante è quella di valore vero di una grandezza, ovvero, quel valore che si otterrebbe attraverso una “misura perfetta”. Poiché è impossibile effettuare una misura esente da incertezze, ogni valore vero è per natura indeterminato.

L'organizzazione più autorevole a livello mondiale di metrologia è l'ISO (Organizzazione Internazionale per la Standardizzazione, con sede a Ginevra), la quale ha pubblicato una “Guida all'espressione dell'incertezza di misura” e un vocabolario di termini di metrologia¹.

La Guida ISO definisce:

- incertezza “*un parametro che caratterizza la dispersione dei valori che possono essere ragionevolmente attribuiti al misurando*”;
- errore “*la differenza fra il risultato di una misura e un valore vero del misurando*”.

Nella pratica operativa si fa uso della “incertezza standard” la quale indica la deviazione standard (di cui si parlerà di seguito) dei possibili valori che può assumere il misurando (ciascuno di essi pesato con il suo “grado di fiducia”);

Per quanto riguarda l'errore, è evidente come esso sia generalmente ignoto, in quanto relativo al valore vero della grandezza di interesse, mentre la definizione ISO di valore vero è:

¹ Essa è basata sulle raccomandazioni dell'Ufficio Internazionale di Pesi e Misure (BIPM) e fornisce una descrizione delle procedure suggerite, con esempi pratici. La Guida accenna anche la base teorica sulla quale essa si fonda, ma in forma molto breve, dato il carattere succinto di collezione di norme, tipico delle pubblicazioni ISO. La Guida riassume comunque, in un centinaio di pagine, 15 anni di lavoro delle più autorevoli organizzazioni mondiali di metrologia: BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML. Oltre alle organizzazioni internazionali che sponsorizzano l'iniziativa, aderiscono molti istituti nazionali ad esse affiliati, come ad esempio: la tedesca DIN (Deutsches Institut für Normung); l'americano NIST (National Institute of Standards and Technology); l'italiano UNI (Ente Italiano per l'Unificazione).

- valore vero: “un valore compatibile con la definizione di una data grandezza particolare”.

Pur riconoscendo che il concetto di valore vero è, di fatto, una idealizzazione, ha senso parlare di valore convenzionalmente vero se con esso si intende quello attribuito a una grandezza particolare e accettato, per convenzione, in quanto avente un'incertezza appropriata all'uso. Ad esempio, il valore indicato su un campione di riferimento può essere usato come valore convenzionalmente vero della grandezza se la sua incertezza ha un effetto trascurabile sull'incertezza totale.

Le cause responsabili degli errori sono sempre molteplici ma esse intervengono sulla misura principalmente in tre modi distinti, se si tiene conto dello strumento e delle condizioni al contorno ai quali dovrà considerarsi anche l'intervento dell'osservatore.

Si potranno, pertanto, verificare: errori accidentali, errori grossolani ed errori sistematici.

Gli errori (fluttuazioni) accidentali sono quelli per cui le cause possono essere immaginate in linea di principio, ma non si possono prevedere gli effetti. In generale, sono conseguenza dell'incertezza con cui sono poste determinate condizioni di misura che sono, invece, considerate come se fossero attuate esattamente. Gli errori accidentali hanno la proprietà di essere variabili sia in valore che in segno e si individuano ripetendo una misura diverse volte con gli stessi strumenti e in condizioni che, per quanto possibile, possono essere ritenute costanti. La teoria degli errori accidentali è svolta mediante la *matematica probabilistica* ricorrendo alle *leggi statistiche*.

Gli errori grossolani sono di ampiezza tale da essere immediatamente riconoscibili e, ovviamente, portano a risultati che vanno subito scartati evidenziabili mediante un numero esuberante di misure. Detti errori sono dovuti essenzialmente alla disattenzione o alla poca perizia dell'osservatore.

Gli errori sistematici influenzano il risultato della misura sempre nello stesso senso ovvero hanno la caratteristica di conservare valore e segno e sono dovuti, ad esempio, all'imperfetta taratura dello strumento di misura o ad errori di modello. Sono eliminabili con tarature, con opportune procedure operative, o rendendoli di segno alterno. Gli errori sistematici possono essere sempre determinati (eseguendo un'accurata indagine critica del metodo impiegato e delle apparecchiature usate) ed è così possibile apportare le opportune *correzioni* al risultato della misura od almeno individuare l'*incertezza* che accompagna il risultato della misura.

Sempre per quanto riguarda il modo di esprimere il risultato delle nostre misure, è un errore spingere la valutazione del risultato stesso al di là della precisione sperimentale; in altre parole, se il calcolo dell'errore per la misura di una lunghezza indica incertezza sulla cifra, ad esempio, dell'ordine del centimetro, è un errore dare nel risultato la cifra dei millimetri, o (peggio) dei decimi o centesimo di millimetro. Nei risultati intermedi possiamo tenere per i successivi calcoli tutte le cifre che vogliamo; ma, giunti al risultato finale, e solo una volta che l'errore sia stato calcolato, occorre troncare il risultato stesso al livello dell'errore da noi stimato ed arrotondare.

1.2 Frequenza e probabilità

Supponiamo che effettuando un numero n di lanci di una moneta l'evento "croce" si presenti r volte, chiamiamo *frequenza relativa* f dell'evento il rapporto $f = r/n$.

Frequenza e probabilità, pur sembrando simili, sono due concetti diversi; infatti, mentre la probabilità si calcola a priori, la frequenza si calcola a posteriori, ovvero dopo le prove.

Il termine probabilità è usato come misura del grado di plausibilità di una affermazione, ovvero del "verificarsi di un certo evento". La probabilità può, dunque, essere definita come la misura del grado di fiducia che un evento si verifichi. L'espressione "si verifichi" sta per "si verifica il contenuto di verità dell'affermazione espressa dall'evento" e non dipende dal fatto che l'avvenimento debba ancora accadere.

Sperimentalmente risulta che quando il numero di prove è "meno frequentemente" succede di osservare grandi scarti della frequenza dal valore di probabilità, ovvero se il numero delle prove è sufficientemente elevato, la frequenza assume un valore prossimo a quello della probabilità².

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_E}{N} = p$$

Questo tipo di osservazioni sperimentali ha portato a formulare la così detta *legge empirica del caso*: *in una serie di prove ripetute un gran numero di volte nelle stesse condizioni, ciascuno degli eventi possibili si manifesta con una frequenza relativa che è circa uguale alla sua probabilità. L'approssimazione migliora con il numero delle prove.*

L'interesse del collegamento fornito dalla legge empirica del caso consiste nel fatto di poter calcolare la probabilità anche in quelle circostanze in cui è difficile fare l'inventario di tutti i casi possibili ed equiprobabili su cui si basa la definizione classica di Laplace, con la convinzione che si stia sostanzialmente determinando la "stessa" quantità.

² Si legge in alcuni libri che la "legge empirica del caso" è anche nota col nome di "legge dei grandi numeri". Questa affermazione non è corretta, perché, in realtà, si tratta di due enunciati concettualmente molto diversi. Infatti, la "legge dei grandi numeri", detta anche "Teorema di Bernoulli", è, appunto, un teorema (e come tale, è una proposizione dimostrabile in una teoria). La legge empirica del caso è invece un'affermazione che sintetizza una regolarità osservabile sperimentalmente.

1.3 Precisione e accuratezza

I termini precisione e accuratezza sono messi in relazione con gli errori casuali e sistematici. Una misura è tanto più precisa quanto più i singoli valori misurati in condizioni di ripetibilità si concentrano intorno alla media della serie di misure effettuate. Il concetto di precisione è qualitativo.

La variabilità dei risultati viene quantificata, come di consueto, nella deviazione standard. Ma questa di per se non è atta a quantificare la precisione della misura secondo il significato usuale del termine di “qualità della misura”. Ad esempio una deviazione standard di 1mm rappresenta ottima o pessima precisione a seconda che si stiano misurando lunghezze della decina di metri o inferiori al centimetro.

L'accuratezza esprime invece l'assenza di errori sistematici nella misura: una misura è tanto più accurata quanto più la media delle misure si approssima al valore vero della grandezza. Anche l'accuratezza è spesso espressa come rapporto fra l'errore sistematico e il valore della grandezza. La figura 1.1 indica la distribuzione di valori ottenuti da misure di diversa precisione e accuratezza, in una situazione in cui si conosce un valore convenzionalmente vero indicato con ϑ .

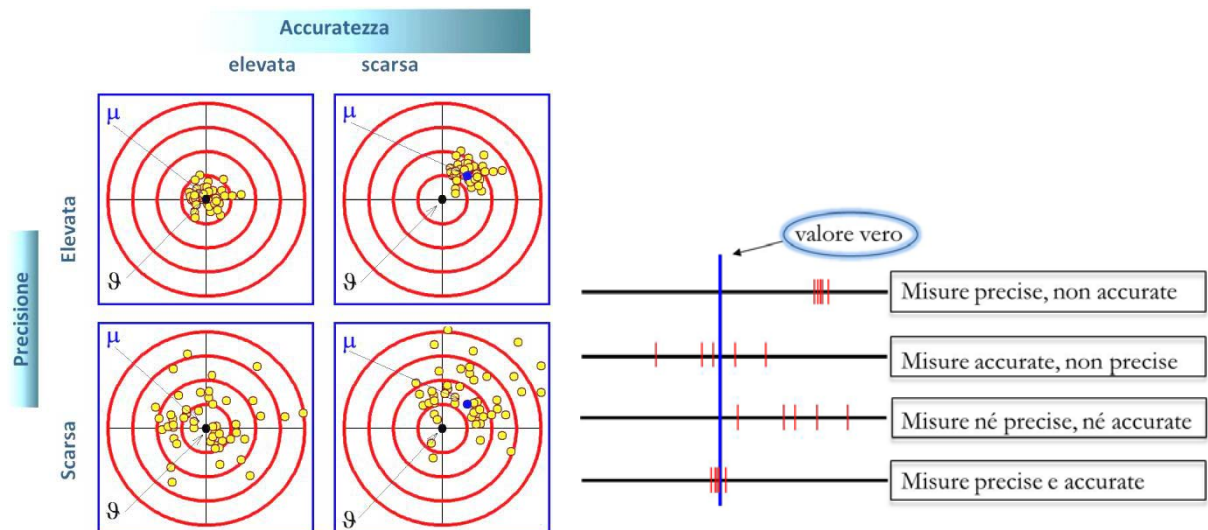


Figura 1.1 – Accuratezza e precisione

1.4 Variabile Statistica

Si considerino gli individui appartenenti ad un determinato insieme, caratterizzati da un attributo X si possono allora classificare gli stessi andando ad esaminarli e determinando il valore X dell'attributo per ognuno di essi. Il risultato di tale classificazione è il seguente insieme di valori, detto variabile statistica:

$$\begin{cases} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ F_1 & F_2 & \dots & F_n \end{cases} \quad (1.1)$$

dove F_i è la frequenza assoluta dell'evento x_i , cioè il numero di individui della popolazione caratterizzati da tale evento ed n è il numero delle forme diverse dell'attributo. Pertanto la variabile statistica è il risultato di una classificazione o, più in generale, di un esperimento operato su una popolazione totalmente nota.

L'argomento X può assumere un numero finito di forme ed in tal caso si dice discreto, oppure un numero infinito, contenute però con continuità in un intervallo limitato $(a-b)$, ed allora si dice continuo.

Considerando la successione dei valori argomentali discreti di X e indicando con N la somma delle frequenze assolute, che equivale al numero degli individui della popolazione, si ha:

$$\sum_{i=1}^n F_i = N \quad (1.2)$$

Invece le frequenze relative saranno espresse da:

$$f_i = \frac{F_i}{N} \quad (1.3) \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n f_i = 1 \quad (1.4)$$

La variabile statistica può scriversi:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ f_1 & f_2 & \dots & f_n \end{array} \right. \quad (1.5)$$

che differisce dalla precedente perché in essa, alla frequenza assoluta F_i è stata sostituita la frequenza relativa f_i .

Esempio 1

Si voglia costruire la distribuzione di frequenza relativa al peso di 40 studenti (approssimata la chilo) di cui si riportano di seguito i valori rilevati:

N. studenti	Peso	N. studenti	Peso	N. studenti	Peso
5	50	2	70	1	63
2	52	1	53	2	71
1	45	1	54	1	75
6	58	2	78	3	48
1	80	1	84	2	57
5	65	2	61	2	67

L'intervallo di peso è 85-45 kg pari a 40 kg. Si sceglie una classe di ampiezza pari a 2 kg definendo quali punti medi delle classi 45,5 – 47,5 – 49,5, ecc. con intervalli 45÷46, 47÷48, 49÷50, ecc. La variabile statistica risulterà essere:

$$X(\text{peso}) \left\{ \begin{array}{cccc} 45 - 46 & 47 - 48 & 49 - 50 & \dots \dots \dots \\ 1 & 3 & 5 & \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

$$\sum_{i=1}^n F_i = N = 40$$

1.4.1 Rappresentazione grafica di una variabile statistica semplice

È possibile rappresentare graficamente una variabile statistica attraverso il diagramma di frequenze: si riportano, in scala opportuna, sull'ascissa i valori numerici dell'argomento X, in ordine crescente; ed in corrispondenza di ciascun valore x_i si riporta, lungo le ordinate, un segmento di lunghezza proporzionale alla frequenza totale F_i di quel valore argomentale. In figura 1.2 è rappresentato il diagramma di frequenza relativo all'esempio .

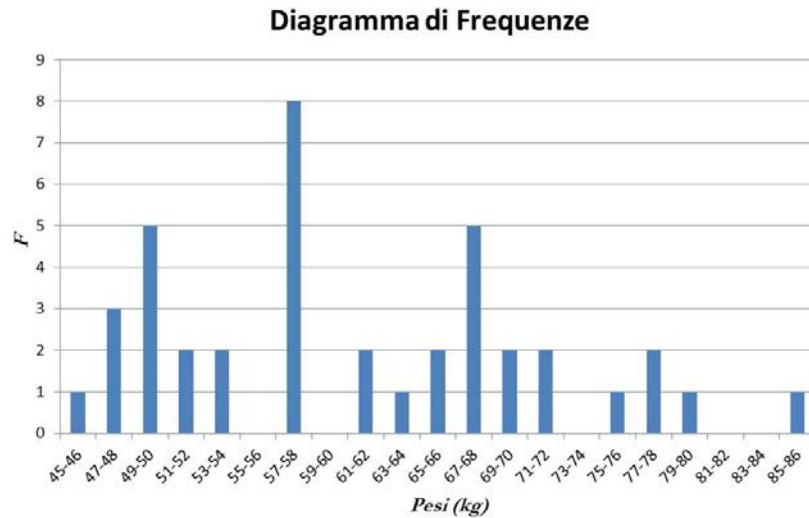


Figura 1.2 – Diagramma di frequenza relative all'esempio 1

Si sarebbe potuta determinare un'altra distribuzione di frequenza scegliendo una diversa ampiezza delle classi ovvero sulle ordinate indicare le frequenze relative al posto delle assolute.

Se la serie dei valori argomentali è numerosa e compresa in un intervallo limitato, allora può essere conveniente un'altra rappresentazione grafica della variabile statistica che tenga conto non più delle frequenze imputabili alla classe ma consideri un rettangolo di area proporzionale al numero di individui in possesso del valore argomentale compreso tra la classe x_i e x_{i+1} . La figura ottenuta si chiama *istogramma*. In tale rappresentazione i rettangoli rappresentanti le frequenze si riferiscono all'intero ambito della classe e non solo al punto di mezzo. Pertanto le altezze dei singoli rettangoli vanno calcolate con la formula:

$$y_i = \frac{F_i}{\Delta x_i} \quad (1.6)$$

dove Δx_i è l'ampiezza dell'intervallo; l'area del rettangolo rappresenta la frequenza (si può anche utilizzarla frequenza relativa).

Esempio 2

Sia data una variabile statistica i cui valori raggruppati in classi sono i seguenti:

Classi	Frequenze assolute
100-120	0,08
120-150	0,15
150-200	0,40
200-300	0,20
300-500	0,18

Si riportano nella seguente tabella le ampiezze degli intervalli e le altezze dell'istogramma

Classi	Ampiezza delle classi	y_i
100-120	20	$0,08/20=0,004$
120-150	30	$0,15/30=0,005$
150-200	50	$0,40/50=0,008$
200-300	100	$0,20/100=0,002$
300-500	200	$0,18/200=0,0009$

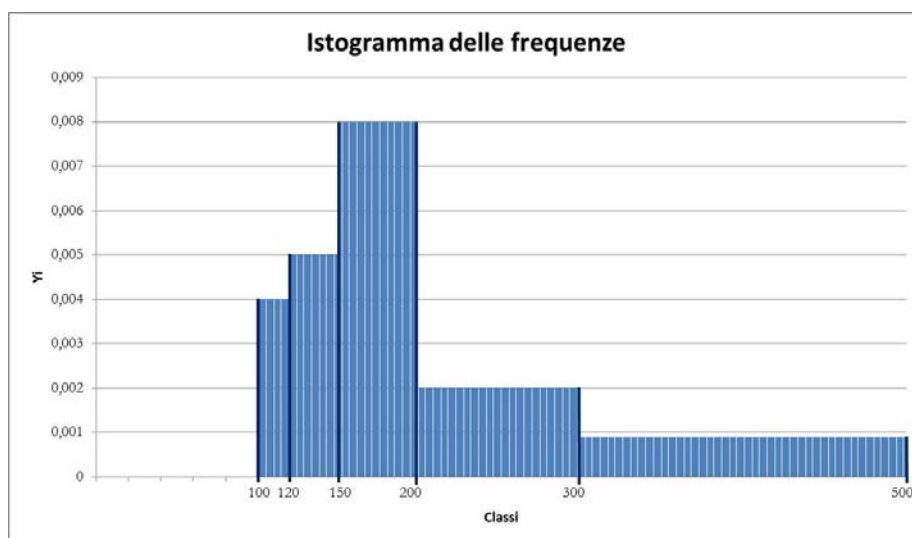


Figura 1.3 – Istogramma della frequenza relative all'esempio 2

La scelta dell'ampiezza dell'intervallo dovrà, tener conto di tre elementi fondamentali: l'estensione del campo di variabilità dell'argomento, il numero complessivo di individui componenti la popolazione ed infine il grado di attendibilità delle rilevazioni dell'argomento stesso.

Nel caso in cui il valore argomentale rappresenta il campione di misure è eccessivo ripartire l'istogramma in classi il cui intervallo sia inferiore alla sensibilità della misura stessa. Al variare dell'ampiezza dell'intervallo, cambia sensibilmente la forma dell'istogramma corrispondente pertanto il numero delle classi rappresenta il compromesso tra una distribuzione troppo dettagliata ed una troppo sintetica.

1.5 I fenomeni aleatori

Un fenomeno aleatorio è quello il cui esito non è prevedibile a priori, ovvero non si conosce la modalità con cui si verifica, Ad esempio:

- il risultato del lancio di un dado;
- la misura di una lunghezza;

Per quanto incapaci di prevedere con esattezza il risultato del singolo evento, si è però in grado di evidenziarne le regolarità e di descriverne un comportamento medio.

Nella topografia, ovvero nella misura di grandezze, la variabilità (ovvero l'*incertezza*) di misura di tipo accidentale può essere descritta a priori con approccio probabilistico, ovvero le oscillazioni dei valori osservati sono rappresentate come estrazioni da una *variabile casuale*.

Lo studio probabilistico si basa sulla *teoria degli errori* il cui scopo è quello di trarre dalle osservazioni di una serie di una grandezza un valore da assumere come il più affidabile, ossia che abbia la massima probabilità di coincidere con un valore vero mediante un determinato criterio in grado di giudicare la precisione delle osservazioni.

1.4.1 Variabile casuale

Una variabile casuale X (v) ad una dimensione è una distribuzione di probabilità il cui insieme di valori argomentali x (individui della popolazione) sono rappresentabile in essa e tali che sia definita la probabilità per qualunque insieme:

$$X \begin{cases} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{cases} \quad (2.1)$$

i numeri p_i associati ai valori x_i misurano un grado di possibilità che l'evento abbia risultato.

La somma di tutte le probabilità finite corrispondenti ad ogni valore argomentale deve essere uguale all'unità:

$$\sum_i^n p_i = 1$$

L'insieme dei valori è definito mediante la *distribuzione delle probabilità* tra i valori x_i ed è rappresentata graficamente riportando in ascissa i valori argomentali ed in ordinata i corrispondenti valori di probabilità. Pertanto, data una variabile aleatoria discreta (ad esempio giorni di pioggia per mese) e monodimensionale del tipo (2.1) si può determinare la probabilità $P(-\infty \leq x \leq x_r)$ che essa assuma valori minori o uguali a x_r . Tale probabilità si ottiene (*principio probabilità totali*) andando a sommare tutti i valori di p_i corrispondenti a $x_i \leq x_r$:

$$P(-\infty \leq x \leq x_r) = \sum_{i=1}^r p_i$$

rappresentabile graficamente mediante il *diagramma cumulativo di probabilità*

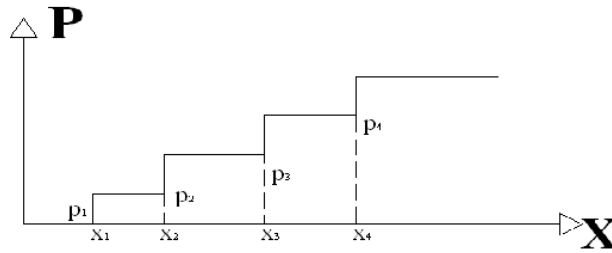


Figura 1.4 – Diagramma cumulativo di probabilità

Può accadere che gli individui appartenenti alla popolazione possono assumere valori compresi in un intervallo x e $x+dx$ assumendo infiniti valori (*variabile casuale continua*), in tal caso non è possibile associare una probabilità finita a ciascun valore è possibile (ad esempio altezza di pioggia caduta per giorno), invece, determinare la probabilità cumulativa la quale è definita, nel caso monodimensionale, mediante una funzione $F(x)$ denominata *funzione di distribuzione*. Tale funzione è sempre positiva e mai decrescente e soddisferà le due condizioni:

$$F(-\infty) = 0$$

$$F(+\infty) = 1$$

La sua rappresentazione cartografica è riportata nella seguente figura:

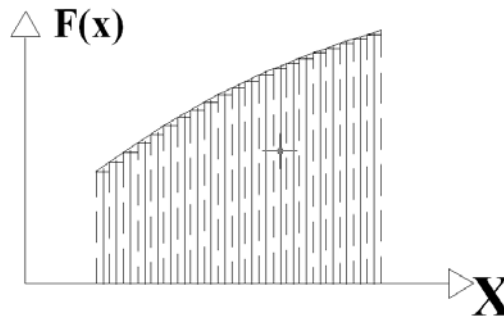


Figura 1.5 – Rappresentazione della funzione di distribuzione

Se si considera il rapporto:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

tenderà a zero all'incrementare di h , pertanto la derivata di $F(x)$ sarà continua e data dalla relazione $f'(x) = \phi(x)$ (*densità di probabilità*), dalla quale deriva la seguente relazione:

$$F(X) = \int_{-\infty}^x \phi(x) dx$$

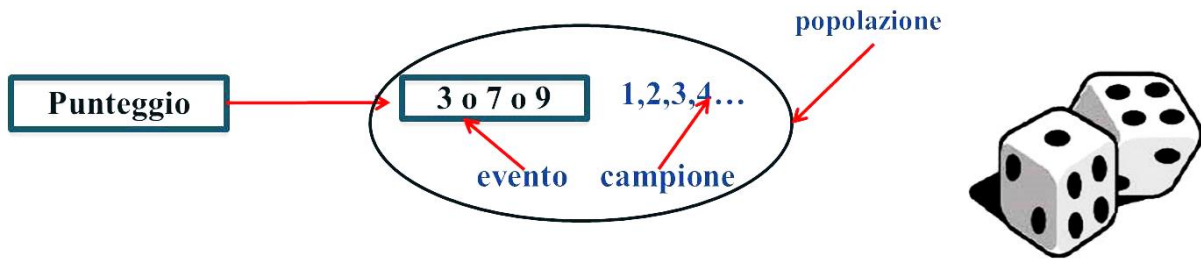


Figura 1.6 – Variabile casuale discreta

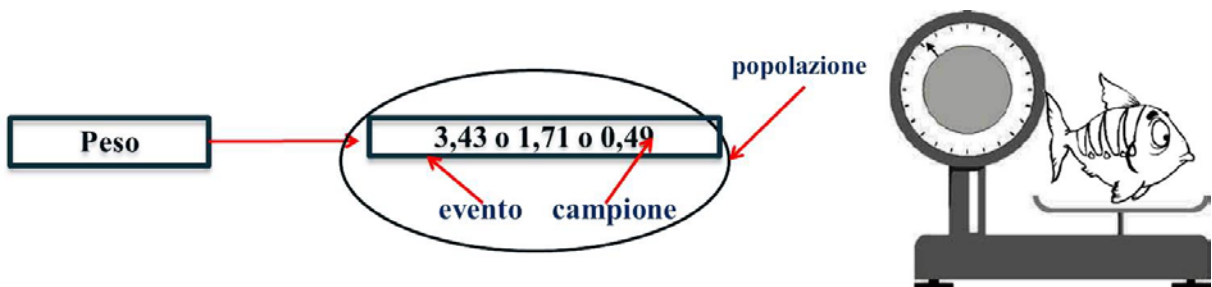


Figura 1.7 – Variabile casuale continua

2.1.1 Parametri caratteristici di una distribuzione di probabilità.

I parametri in grado di fornire informazioni e rappresentazioni utili sulle caratteristiche della distribuzione sono i cosiddetti momenti in particolare la *media* (momento del primo ordine) la *varianza* (momento del secondo ordine).

In generale un momento del k-esimo ordine è espresso dalla relazione:

$$M(x^k) = \sum_{i=1}^n x_i^k p_i \quad \text{per una variabile discreta}$$

$$M(x^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \phi(x) dx \quad \text{per una variabile continua}$$

In particolare si definisce *media* (m) il momento del primo ordine che rappresenta il valore centrale attorno a cui oscillano i valori trovati ed è dato dalle seguenti relazioni:

$$m = M(x) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

$$m = M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \phi(x) dx$$

Per ogni variabile aleatoria si definisce scostamento o *scarto* dal suo valor medio la quantità v dato da:

$$v_i = x_i - m$$

Ad ogni valore v_i compete una probabilità pari a quella del valore x_i corrispondente, il suo valor medio è nullo, mentre, il valor medio del suo quadrato, che rappresenta un momento del secondo, ordine denominato *varianza* (σ^2) è dato da:

$$\sigma^2 = M(v^2) = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 p_i$$

$$\sigma^2 = M(v^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 \phi(x) dx$$

La varianza ha sempre valore positivo ed è nulla solo se tutti i valori della variabile coincidono con la media, mentre cresce con i quadrati delle differenze dei singoli valori dalla media e tanto più quanto più probabili sono questi valori; ne consegue che la *varianza misura la dispersione dei valori attorno alla media*. A piccoli valori di varianza corrisponde un'elevata probabilità di avere valori della variabile prossimi al valor medio, pertanto, la media rappresenterà bene l'insieme dei valori.

Si definisce *deviazione standard* o *scarto quadratico medio* la radice della varianza.

2.1.2 Proprietà delle variabili casuali

- 1) *Il valor medio di una variabile aleatoria somma (o differenza) di più variabili è dato dalla somma (o differenza) dei valori medi delle variabili aleatorie componenti*

Date due variabili aleatorie discrete X e Y aventi rispettivamente valori argomentali x_i e y_j e probabilità p_i e q_j la variabile somma $s_{ij} = x_i + y_j$ avrà valor medio espresso dalla relazione:

$$M(s) = M(x + y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i + y_j) p_i q_j = M(x) + M(y)$$

- 2) *Il valor medio di una variabile aleatoria prodotto di più variabili indipendenti è dato dal prodotto dei valori medi delle variabili aleatorie componenti*

Sia $z_{ij} = x_i \cdot y_j$ la variabile aleatoria prodotto si ha:

$$M(z) = M(x \cdot y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i \cdot y_j) p_i q_j = M(x) \cdot M(y)$$

- 3) *La varianza di una variabile aleatoria somma (o differenza) di più variabili indipendenti è dato dalla somma (o differenza) delle varianze delle variabili aleatorie componenti*

$$\sigma^2(s) = \sigma^2(x + y) = M(x^2) - M^2(x) + M(y^2) - M^2(y) = \sigma^2(x) + \sigma^2(y)$$

- 4) *Moltiplicando una variabile per un coefficiente "a" la media sarà data dalla media della variabile per il coefficiente, mentre la varianza sarà data dalla varianza della variabile moltiplicata per il quadrato del coefficiente.*

In relazione alle due ultime regole è possibile enunciare la Legge di propagazione pitagorica della varianza: *La varianza della somma (o differenza) di due o più variabili aleatorie indipendenti è uguale alla somma (o differenza) delle varianze delle variabili componenti.*

Infatti, considerando una variabile data da:

$$s = ax + by + cz$$

la sua varianza sarà:

$$\sigma^2(s) = a^2 \sigma^2(x) + b^2 \sigma^2(y) + c^2 \sigma^2(z)$$

Le stesse proprietà valgono nel caso di variabili continue purché indipendenti.

5) La varianza di una variabile aleatoria somma di due variabili dipendenti e correlate è uguale alla somma delle varianze delle variabili componenti più un ulteriore termine denominato covarianza.

Qualora le due variabili x e y siano fra loro dipendenti o correlate non è più valida la regola 3) e si avrà:

$$\sigma^2(s) = \sigma^2(x) + \sigma^2(y) + 2\{M(x \cdot y) - M(x) \cdot M(y)\}$$

Il termine

$$\sigma(x, y) = M(x \cdot y) - M(x) \cdot M(y)$$

è denominato *covarianza* delle due variabili aleatorie correlate ed esprime il loro momento misto rispetto alle medie.

Nel caso di variabili aleatorie continue la covarianza è espressa dalla seguente relazione:

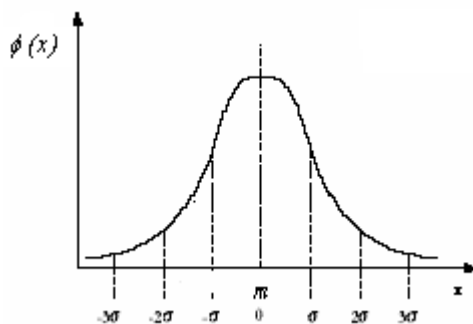
$$\sigma(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{x - M(x)\} \{y - M(y)\} \phi(x, y) dx dy$$

Se si vuole caratterizzare la correlazione fra le variabili con un parametro adimensionale, conviene rapportare la covarianza alla varianza delle singole variabili introducendo il coefficiente di correlazione data da:

$$\rho = \frac{\sigma(x, y)}{\sigma(x) \cdot \sigma(y)}$$

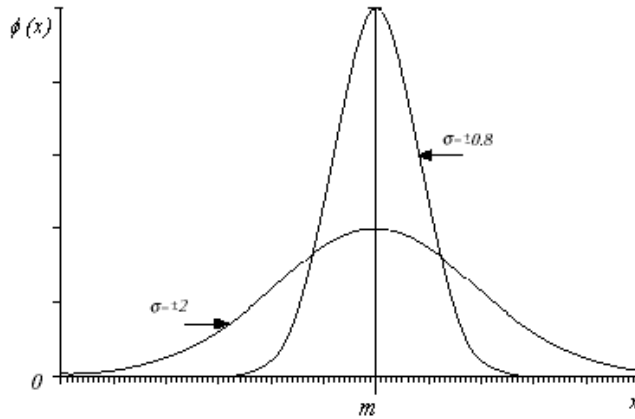
1.5 DISTRIBUZIONE NORMALE

Esistono differenti distribuzioni, per la combinazione delle misure, l'esperienza ha dimostrato che di fondamentale importanza può considerarsi quella definita *distribuzione normale* o *gaussiana* data dalla funzione:



$$\phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

La curva normale, detta curva o distribuzione di Gauss ha una forma a campana ed è simmetrica rispetto al valore di massima probabilità che corrisponde al valore medio della variabile; presenta due punti di flesso e tende asintoticamente all'asse delle x sia per valori positivi che negativi della variabile. Ne consegue che detta curva è nota quando si conoscono l'ascissa della sommità della curva (*valore medio*), e la distanza da questa dei punti di flesso (*deviazione standard*).



Si osserva che la curva a parità di valor medio ha andamento più appiattito quanto è maggiore il valore della varianza che la definisce, pertanto saranno maggiormente dispersi i valori attorno alla media.

La funzione di distribuzione di una variabile normale è data da:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \phi(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

La probabilità che un individuo, preso a caso fra la popolazione, presenti un valore compreso entro certi limiti è data dall'area sottesa dalla curva entro un certo intervallo; si verifica dal suddetto integrale che per esempio il 68.26% della popolazione si trova nell'intervallo $m \pm \sigma$, il 94.44% fra $m \pm 2\sigma$ ed il 99.73% fra $m \pm 3\sigma$.

2.3.1 Principio dei minimi quadrati

Un metodo di stima in grado di fornire una stima dei parametri della distribuzione è il principio di massima verosimiglianza.

Siano x_1, x_2, \dots, x_n i valori osservati di una variabile aleatoria di cui si conosce la legge di distribuzione dipendente da r parametri $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_r$, la probabilità di questa distribuzione sarà fornita per le proprietà sopra enunciate e nelle ipotesi di indipendenza delle variabili da:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_r) = p(x_1)p(x_2)\dots p(x_n)$$

ovvero

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_r) = \phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n)dx_1dx_2\dots dx_n$$

Il principio di massima verosimiglianza stabilisce di assumere più plausibili i parametri ϑ_j che rendono massima la funzione $P(x_1, x_2, \dots, x_n, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_r)$ (*funzione di verosimiglianza*) per quei determinati valori osservati della variabile aleatoria. Pertanto i valori più plausibili devono soddisfare la condizione:

$$\frac{\partial P}{\partial \vartheta_1} = 0; \frac{\partial P}{\partial \vartheta_2} = 0; \dots; \frac{\partial P}{\partial \vartheta_r} = 0;$$

Al variare del campione osservato variano le stime più plausibili degli r parametri.

Se questo principio si applica a delle grandezze descritte dalla distribuzione normale di Gauss, il principio di massima verosimiglianza conduce al *principio dei minimi quadrati* ovvero alla determinazione della miglior stima delle grandezze m e σ .

La funzione di massima verosimiglianza sarà data dall'espressione:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n, m, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma^n (\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{\sum (x_i - m)^2}{2\sigma^2}}$$

la funzione descritta ha il suo valore massimo quando l'esponente è minimo:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - m) = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \min \quad \underline{\text{PRINCIPIO DEI MINIMI QUADRATI}} \quad (2.2)$$

Tale relazione è di fondamentale importanza nella teoria delle compensazioni delle misure e costituisce il *principio dei minimi quadrati: il valore più plausibile di una grandezza della quale siano eseguite n misure di uguale precisione è quello che rende minima la somma dei quadrati degli scarti, ossia la differenza fra le singole misure e lo stesso valore più plausibile.*

La (2.2) sarà soddisfatta da quel valore di m che annulla la derivata:

$$\frac{d \sum_{i=1}^n (x_i - m)}{dm} = 0 \quad (2.3)$$

Attraverso la (2.3) si ricava la *stima della media*:

$$\bar{m} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

mentre la *stima della varianza* sarà data dalla seguente relazione

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{n - 1}$$

dalla quale è possibile ricavare la *stima della varianza della media*

$$\bar{\sigma}_m^2 = \frac{\bar{\sigma}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{(n - 1)n}$$

2.3.2 Misure di diversa precisione

Per una stessa grandezza, spesso, si eseguono più misure ognuna delle quali è caratterizzata da un diverso grado di fiducia (compiute con metodi, strumenti e condizioni operative differenti), in

questo caso non sarà più possibile considerare la media geometrica delle misure bensì dovrà considerarsi la media pesata delle stesse.

Il peso di un'osservazione è definito dal rapporto:

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

dove σ_0^2 rappresenta la varianza dell'unità di peso (varianza della popolazione a cui è stato attribuito peso unitario) e σ_i^2 la varianza della singola misura. La determinazione dei pesi è effettuata, preliminarmente, assumendo σ_0^2 di valore arbitrario, pertanto esprimendoli solo in funzione della varianza σ_i^2 .

La funzione di massima verosimiglianza sarà data dall'espressione:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n, m, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2) = \frac{1}{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 \cdot \dots \cdot \sigma_n^2 (\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2} \sum \frac{(x_i - m)^2}{\sigma_i^2}} \Leftrightarrow$$

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n, m, \sigma_0^2) = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n}{(2\pi\sigma_0^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum p_i (x_i - m)^2}$$

che come già detto ha il suo valore massimo quando l'esponente è minimo

$$\sum_{i=1}^n p_i (x_i - m)^2 = \sum_{i=1}^n p_i v_i^2 = \min \Rightarrow \frac{\partial \sum p_i (x_i - m)^2}{\partial m} = 0$$

da cui si ricava la *media ponderata*:

$$\bar{m}_p = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

La stima della varianza dell'unità di peso sarà fornita dalla seguente relazione:

$$\bar{\sigma}_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i v_i^2}{n-1}$$

1.6 VARIABILI E DISTRIBUZIONE NORMALE BIDIMENSIONALE

Una variabile aleatoria bidimensionale è caratterizzata dal manifestarsi, all'atto di una prova, con più valori all'interno di ciascun valore argomentale in forma discreta o continua. Per individuare l'evento occorre, quindi, un'ennupla di valori numerici costituenti la variabile aleatoria.

Si analizza il caso bidimensionale, ovvero per ogni variabile aleatoria è possibile assegnare una coppia di valori x e y che la definisce ed inoltre le distribuzioni $\phi(x)$ e $\phi(y)$ sono entrambe normali. In tale ipotesi è possibile scrivere:

$$\phi(x, y) = \phi(x) \cdot \phi(y) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right\}}$$

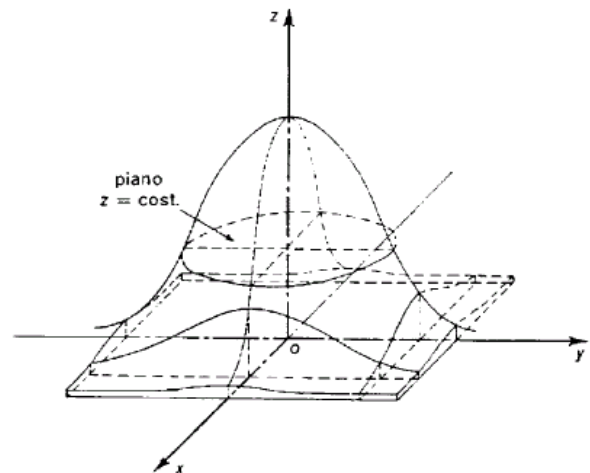
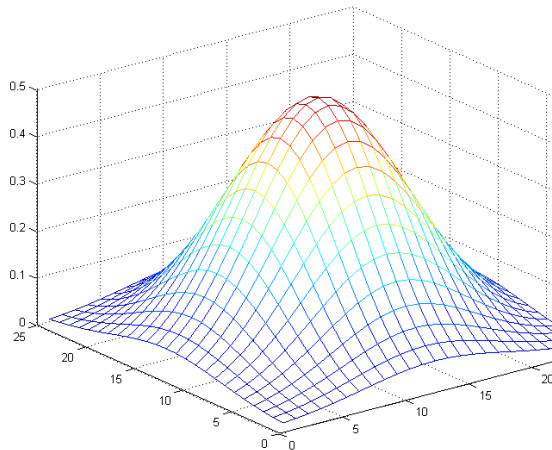
Nel caso in cui le due variabili sono correlate (dotate di covarianza) la densità di probabilità normale bidimensionale, è data da:

$$\phi(x, y) = \phi(x) \cdot \phi(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right\}} \quad (2.4)$$

dove

$$\rho = \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2}$$

La (2.4) rappresenta l'equazione di una superficie $z = \phi(x, y)$ avente la seguente rappresentazione grafica



L'intersezione di tale superficie con piani paralleli a xz e yz dà luogo a meno di un fattore di proporzionalità a curve corrispondenti a distribuzioni normali, mentre, le intersezioni con piani $z = cost$ forniscono curve di equazione:

$$\frac{1}{1-\rho^2} \left\{ \frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2} \right\} = C^2$$

con C valore costante, che al variare di C rappresenta ellissi aventi semiassi maggiori e minori dati da:

$$\begin{aligned}
 a &= C\sigma'_1 \\
 b &= C\sigma'_2
 \end{aligned}
 \quad \text{dove} \quad
 \begin{aligned}
 \sigma'_1 &= \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sqrt{(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2 + 4\sigma_{1,2}^2}}{2} \\
 \sigma'_2 &= \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sqrt{(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2 + 4\sigma_{1,2}^2}}{2}
 \end{aligned}$$

Tali relazioni consentono di calcolare, note le varianze e le covarianze, il semiasse maggiore e minore di una qualsiasi ellisse corrispondente ad un generico valore di C , per $C=1$ si ottengono gli *ellissi standard*.

L'angolo \mathcal{G} che il semiasse maggiore forma con l'asse delle x è dato dalla seguente relazione:

$$\operatorname{tg} 2\mathcal{G} = \frac{2\sigma_{1,2}}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}$$

Attraverso la conoscenza dei valori dei semiasse e dell'angolo di orientamento l'ellisse è univocamente determinato.

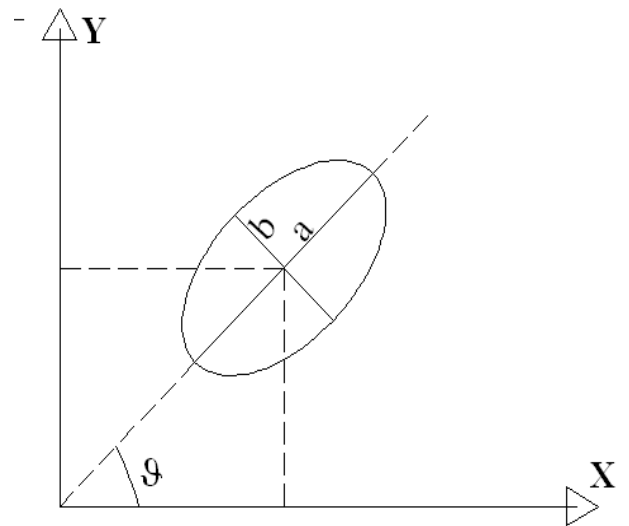
Le ellissi rappresentano il luogo dei punti ad uguale probabilità, al loro interno ricadono tutti i punti a probabilità maggiore di quella che compete al piano $\xi = \text{cost}$ che le definisce. La probabilità ovviamente varia al variare di C , in particolare:

$$C = 1 \Rightarrow P = 0,39$$

$$C = 2 \Rightarrow P = 0,86$$

$$C = 3 \Rightarrow P = 0,99$$

Pertanto, l'*ellissi standard* rappresenta la probabilità di ottenere al suo interno il 39% dei valori possibili.



[1] Bertrand Russell (2008). *I principi della matematica*. (Edizione Integrale); editore: Newton Compton